

*Андреев Николай Николаевич
Калиниченко Михаил А*

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ФИЛЬМЫ О ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ И НЕРЕШЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИКИ ФИЛЬМ ПЕРВЫЙ. ЗАДАЧА ТОМСОНА

От редакции. В этом номере журнала мы начинаем публикацию цикла компьютерных фильмов Н.Н. Андреева и М.А. Калиниченко об интересных математических задачах, постановка которых понятна школьнику, но до сих пор эти задачи не решены учеными до конца.

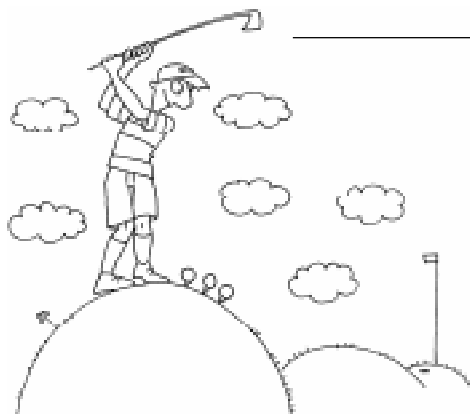
Фильмы вызвали большой интерес на Международном конгрессе по математическому образованию (ICME-10), который проходил в Копенгагене.

Сами фильмы предоставлены авторами для свободного распространения в России и будут располагаться на диске к журналу. Редакция убеждена, что их просмотр доставит истинное удовольствие как тем, кто интересуется математикой (даже если это только занимательная математика), так и тем, кто ищет новые формы использования компьютерных инструментов в образовании.

Для удобства учителей, желающих использовать фильмы в учебном процессе, мы помещаем подробную раскадровку фильма с условными иллюстрациями. Тем же, кто планирует самостоятельно снимать учебные фильмы (а в этом номере начинается также цикл статей Т.Е. Андреевой по методике подготовки учебных видеофильмов), такая раскадровка станет хорошим учебным пособием.

Кадр 1. Заголовок.

ЗАДАЧА ТОМСОНА



Кадр 2. Постановка задачи.

Поместим на сферу N одинаковых зарядов. К каким расположениям будут стремиться заряды, пытаясь минимизировать потенциальную энергию системы?

Кадр 3. Историческая справка

Joseph John Thomson.
 Родился 18 декабря 1856 года.
 В 1884 году избран третьим Cavendish Professor.
 Руководитель Cavendish Laboratory, Cambridge.
 В 1897 году экспериментально открыл существование электронов.
 В 1906 году Нобелевская премия по физике.
 Умер 30 августа 1940 года.
 Семь его ассистентов стали лауреатами Нобелевской премии.



Кадр 4. История решения задачи

На рубеже XIX и XX веков английский физик Дж. Томсон проводил эксперименты по нахождению наилучших расположений для небольших количеств зарядов.

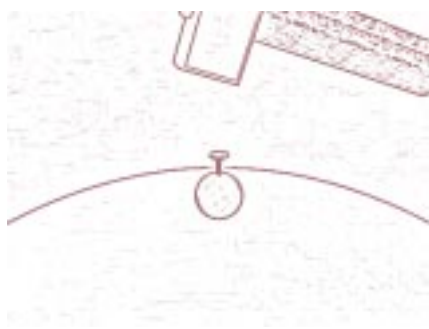
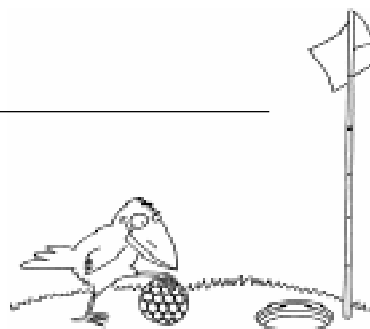
После появления компьютеров проводилось множество численных экспериментов.

Однако, только в конце XX века некоторые частные случаи были решены математически строго.



Кадр 5–6.

Зафиксируем несколько зарядов и рассмотрим силы, действующие на подвижный заряд.



Кадр 7.

Взаимодействие двух зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга, определяется потенциалом Ньютона: $U = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$.

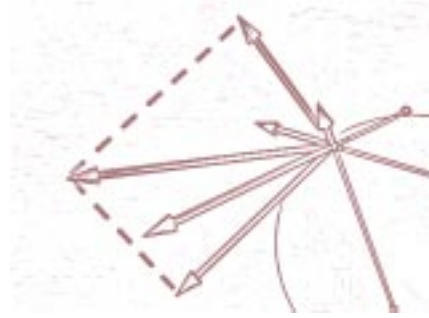
Кадр 8.

Сила взаимодействия есть градиент потенциала.

$$F = \text{grad } U = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Кадр 9.

Результирующая сила равна сумме всех сил, действующих на данный заряд.



Кадр 10.

Разложим вектор силы на две составляющие: перпендикулярную к сфере и касательную.

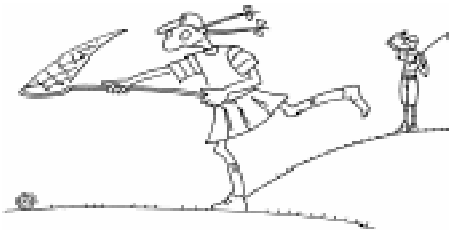
Кадр 11.

Перпендикулярная составляющая пытается вытолкнуть заряд со сферы и на движение влияния не оказывает.

Касательная составляющая определяет направление и скорость движения заряда в следующий момент.

Кадр 12.

Движение останавливается, когда сила, действующая на заряд, перпендикулярна сфере.



Кадр 13.

В случае системы свободных зарядов, движение останавливается, когда для каждого заряда сила, действующая на него, перпендикулярна сфере.

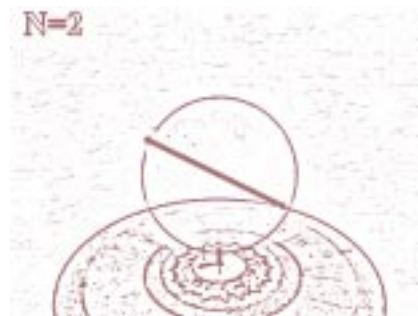
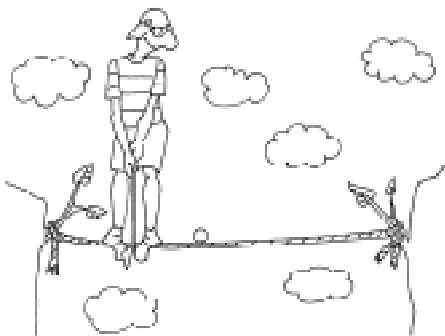
Кадр 14.

Расположим на сфере N одинаковых зарядов и посмотрим, к каким конфигурациям они будут стремиться.

Рассмотрим случаи, когда экстремальность полученных конфигураций удалось доказать математически строго.

Кадр 15. $N = 2$

Экстремальная конфигурация: две диаметрально противоположные точки.



Кадр 16.

$N = 3$

Экстремальная конфигурация: вершины правильного треугольника, вписанные в большую окружность сферы.



Кадр 17.

$N = 4$

Экстремальная конфигурация: вершины правильного тетраэдра.



Кадр 18.

При $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$ точная оценка энергии снизу получается использованием неравенств о среднем арифметическом, среднем геометрическом и среднем гармоническом.



Кадр 19.

$N = 6$

Экстремальная конфигурация: вершины правильного октаэдра.

Кадр 20.

$N = 12$

Экстремальная конфигурация: вершины правильного икосаэдра.



Кадр 21.

Задача Томсона в трехмерном пространстве решена только при $N = 2, 3, 4, 6$ и 12 .

Кадр 22.

А как проявляют себя в этой задаче два других правильных многогранника – куб и додекаэдр?

Кадр 23.

Если повернуть четыре вершины куба, то энергия системы зарядов уменьшится. Значит, вершины куба не являются экстремальной конфигурацией. Решение задачи в данном случае неизвестно.



Кадр 24.

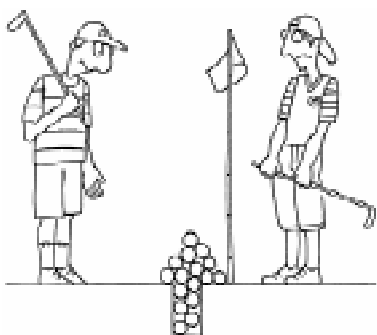
$N = 20$

Как и в случае куба, можно предьявить конфигурацию, обладающую меньшей энергией, чем заряды, расположенные в вершинах додекаэдра. Однако экстремальность какой-либо конфигурации не доказана.

Кадр 25.

$N = 5$

Численные расчеты указывают на данную конфигурацию. Однако в этом случае задача не решена.



Кадр 26.

Задача Томсона состоит в нахождении конфигурации зарядов, соответствующей глобальному минимуму потенциальной энергии системы.

Существуют и другие равновесные конфигурации N зарядов. Придя к такому положению, система стабилизируется. Однако энергия таких конфигураций может быть не минимальна.

Кадр 27.

Если изначально все пять зарядов находились на экваторе, то сила, действующая на каждый заряд, всегда будет находиться в плоскости экватора.

Значит, заряды будут двигаться только по экватору.

Кадр 28.

Заряды расположились в вершинах правильного пятиугольника.

Это равновесная конфигурация, однако, она не соответствует глобальному минимуму потенциальной энергии системы. Рассмотренная ранее конфигурация пяти зарядов обладает меньшей потенциальной энергией.



Кадр 29.

Рассмотрим еще одну начальную конфигурацию пяти зарядов.

Кадр 30.

Заряды расположились в вершинах правильной четырехугольной пирамиды.

Это расположение пяти зарядов является равновесным. Как и в предыдущем случае, можно предъявить конфигурацию с меньшей потенциальной энергией.



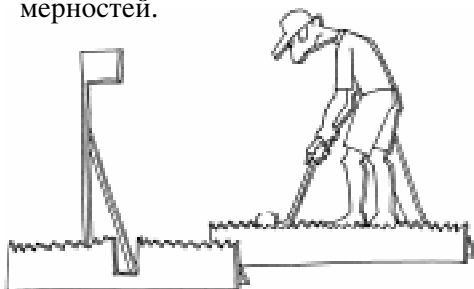
Кадр 31.

При увеличении числа зарядов количество равновесных конфигураций стремительно растет.

Это осложняет исследование задачи методами численного моделирования даже при использовании современных компьютеров.

Кадр 32.

Важные приложения имеет задача Томсона в пространствах других размерностей.



Кадр 33.

Случай плоскости: система N одинаковых зарядов находится на окружности.

К какой конфигурации они стремятся, пытаясь минимизировать потенциальную энергию системы?

Кадр 34.

Экстремальная конфигурация – вершины правильного N -угольника.

Кадр 35.

В размерностях больше трех задача Томсона решена математически строго лишь в редких случаях.

Например, доказано, что в 24-мерном пространстве минимум потенциальной энергии системы из 196560 зарядов на сфере достигается, если заряды расположены в минимальных векторах знаменитой решетки Лича.

Кадр 36.

Известные точные решения задачи Томсона получены методами теории приближения функций.

Эта область математики, развитая П.Л. Чебышевым и его учениками, является мощным методом решения разного круга задач.

Кадр 37.

Отметим, что мы не учитывали динамические эффекты, возникающие при движении зарядов. Такая модель возможна, если между зарядами и сферой есть сила трения.

Аккуратно, с точки зрения физики, задача Томсона может быть сформулирована так: в какие точки на сфере нужно поместить N одинаковых зарядов, чтобы конфигурация соответствовала минимальной потенциальной энергии системы.

Кадр 38. Литература

Фильм основан на работах:

L.L. Whyte. Unique arrangements of points on a sphere // The Amer. Math. Monthly. 1952. V.59, N 9. P. 606-611.

В.А. Юдин. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 115-121.

N.N. Andreev. One extremal property of the icosahedron // East Journal on Approximation. 1996. V. 2, N 4. P. 301-304.

Н.Н. Андреев, В.А. Юдин. Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое просвещение (третья серия). 1997. Вып. 1. С. 115-125.

Кадр 39. Важные работы

Точные решения частных случаев задачи в высших размерностях и при других потенциалах:

А.В. Колушов, В.А. Юдин. О конструкции Коркина-Золотарева // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 155-157.

A.V. Kolushov, V.A. Youdin. Extremal dispositions of points on a unit sphere // Analysis Mathematica. 1997. V. 23, № 1.

Н.Н. Андреев. Расположение точек на сфере с минимальной энергией // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 1997. Т. 219. С. 27-31.

Н.Н. Андреев. Минимальный дизайн 11 порядка на трехмерной сфере // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 4. С. 489-497.

Кадр 40. Титры

Авторы фильма выражают благодарность: Георгию Андреевичу Алексееву, Анне Николаевне Андреевой, Николаю Петровичу Долбилину, Станиславу Люшнину, Мише Фейгину.

Идея фильма: Николай Андреев, Владимир Юдин.

Компьютерная графика: Михаил Калиниченко.

*Андреев Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный сотрудник
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Калиниченко Михаил Александрович,
художник проекта.*



Наши авторы, 2005.
Our authors, 2005.